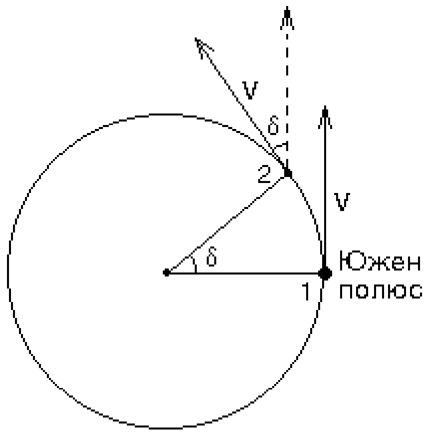
III кръг на III национална олимпиада по астрономия, ***април 2000 г.***
УЧЕНИЦИ X - XII КЛАС

<u>**Задача 1 (9 точки):**</u> *Участници в полярна експедиция се намират точно на южния полюс по време на полярната нощ. Те тръгват оттам през дълбокия сняг със скорост 2 km/h, като се движат по посока на звездата Сириус. На какво разстояние от полюса ще се намират след 24 часа? Каква линия ще представлява техният път?*

Решение: Движейки се със скорост 2 km/h, участниците в полярната експедиция няма да изминат голямо разстояние за 24 часа. Можем да пренебрегнем кривината на земното кълбо и да считаме, че те се движат по равнина **(1 т.)**. Векторът на скоростта им непрекъснато е насочен към звездата Сириус. Звездата Сириус участва във видимото денонощно въртене на небесната сфера от запад на изток и за 24 часа се завърта по небето приблизително на $360^\circ + 1^\circ$. Допълнителният един градус се появява поради това, че звездата прави едно пълно завъртане по небето не за 24 часа (слънчево денонощие), а за около 23^h56^m (звездно денонощие). За оставащите 4 минути до 24 часа звездата се завърта на още $(4^m : 60) \times 15^\circ = 1^\circ$ **(2 т.)**. Следователно векторът на скоростта на полярниците се върти равномерно от изток на запад, следвайки направлението към Сириус, като прави едно пълно завъртане за едно звездно денонощие. По големина скоростта на движение на полярниците остава постоянна. Това означава, че те се движат по окръжност с дължина $23^h56^m \times 2$ km/h = 47.867 km и радиус 47.867 / 2π = 7.622 km **(4 т.)**. Центърът на окръжността е встрани от полюса. След като опишат един път тази окръжност и се върнат на южния полюс за 23^h56^m, полярниците ще извървят още 1/360 част от нея, или 133 m до пълните 24 часа.

Понеже 133 m са много по-малко от радиуса на окръжността, можем да пренебрегнем кривината на тази дъга и да считаме, че полярните изследователи ще се окажат на 133 m от полюса **(2 т.)**. Разбира се, за да бъде така, те трябва да се движат много точно по посока на Сириус, а това е трудно при вървене, особено в дълбок сняг. Необходимо е да се отбележи, че понеже са на южния полюс, полярниците ще се движат по посока, обратна на часовниковата стрелка.



При движение по окръжност, ако за даден интервал от време радиус-векторът на движещата се точка се завърти на ъгъл δ, то и векторът на скоростта се завърта на същия ъгъл δ.

III кръг на III национална олимпиада по астрономия, ***април 2000 г.***

УЧЕНИЦИ X - XII КЛАС

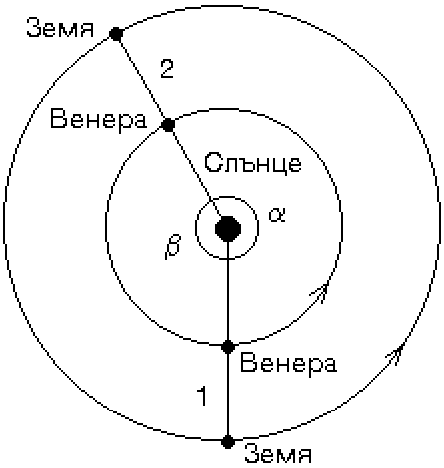
<u>Задача 2 (13 точки):</u> *Докажете, че при всяко долно съединение планетата Венера е обърната към Земята с една и съща своя страна.*

Решение: Венера и Земята обикалят около Слънцето в една и съща посока. Ако $T_З = 365^d.26$ и $T_B = 224^d.7$ са съответно периодите на орбитално движение на Земята и на Венера около Слънцето, то периодът, през който ще се повтарят долните съединения на Венера, ще бъде T_{SYN}, като:

$$1 / T_{SYN} = 1 / T_B - 1 / T_З$$

$$T_{SYN} = T_B\, T_З / (T_З - T_B) \qquad \textbf{(2 т.)}$$

$$T_{SYN} \approx 583^d.9 \qquad \textbf{(1 т.)}$$



За такъв интервал от време Венера прави $N = T_{SYN} / T_B = 583^d.9 / 224^d.7 \approx 2.5985$ обиколки по орбитата си около Слънцето. Дробната част на N показва какъв ъгъл сключват правата линия, на която са били разположени Земята и Венера при първото съединение, и правата, на която са двете планети при най-близкото следващо съединение. Този ъгъл е:

$$\alpha = 360^\circ \text{ x } 0.5985 \approx 215^\circ.5 \qquad \textbf{(2 т.)}$$

Както знаем, Венера се върти около своята ос в посока, обратна на движението на планетите по техните орбити. Следователно, за да е обърната тя с една и съща своя страна към Земята при всяко съединение, то за време, равно на T_{SYN}, Венера трябва или да се е завъртяла около оста си на ъгъл:

$$\beta = 360^\circ - \alpha = 144^\circ.5,$$

или да е направила определен брой пълни завъртания около оста си по 360° плюс непълно завъртане на ъгъл β. **(3 т.)** Щом периодът на околоосно въртене на Венера е $P_B = 243^d.2$, то за време T_{SYN} тя се е завърта около оста си:

$$n = T_{SYN} / P_B = 583^d.9 / 243^d.2 \approx 2.401 \text{ пъти.} \qquad \textbf{(2 т.)}$$

Следователно тя е направила две пълни завъртания и още 0.401 завъртане**(1т.)**, което съответства на ъгъл:

$$\beta_1 = 360^\circ \text{ x } 0.401 \approx 144^\circ.4 \qquad \textbf{(1 т.)}$$

Виждаме, че при точността на нашите изчисления $\beta_1 \approx \beta$ и можем да твърдим, че при второто съединение Венера действително ще е обърната към Земята със същата своя страна, както при първото, а значи и при всяко следващо съединение също ще е така **(1 т.)**.

III кръг на III национална олимпиада по астрономия, ***април 2000 г.***
УЧЕНИЦИ X - XII КЛАС

<u>Задача 3 (13 точки):</u> *Голям извънземен космически кораб с маса 10^6 kg навлиза в кръгова орбита около Луната със скорост 5 km/sec. Корабът се движи на височина 12 km над лунната повърхност без да променя скоростта си. Йонните ракетни двигатели работят непрекъснато, като изхвърлят 250 g гориво в секунда. В каква посока и с каква скорост изтича плазмената струя от двигателите? Ако на борда на кораба космонавтите имат привичното за тях тегло, то какво е ускорението на силата на тежестта на тяхната планета?*

Решение: Кръговата скорост на кораба на височина h = 12 km над лунната повърхност е:

$$v_{1K} = (GM_Л / (R_Л + h))^{1/2} = 1.67 \text{ km/sec} \qquad \textbf{(2 т.)}$$

Щом корабът не променя скоростта си при навлизане в тази кръгова орбита около Луната, то следователно той се движи по нея със скорост, по-голяма от $v_{1К}$. Гравитационната сила на Луната не е достатъчна, за да го задържи на кръговата орбита. Ето защо към кораба трябва да се приложи допълнителна сила, която заедно с гравитационната ще му придаде необходимото центростремително ускорение. Тази сила се осигурява от двигателите на кораба **(1 т.)**. Тъй като големината на скоростта по орбитата му не се променя, то силата на реактивните двигатели е приложена перпендикулярно към траекторията на кораба, т.е. струята от двигателите изтича в посока обратна на посоката от кораба към Луната, перпендикулярно на движението на кораба по орбитата му **(1 т.)**. Ако F_g е гравитационната сила, с която Луната привлича кораба, F_m е реактивната сила на двигателите, m е масата на кораба, v = 5 km/sec е скоростта, с която той навлиза в орбита около Луната, то:

$$mv^2 / ((R_Л + h) = F_g + F_m \qquad \textbf{(2 т.)}$$

Знаем обаче, че $F_m = m_f u$ е реактивната сила на двигателя, където m_f е масата на горивото, изтекло за 1 sec, а u е скоростта на изтичане на струята от двигателите на кораба **(2 т.)**. Следователно:

$$u = (m / m_f)\,(v^2 / (R_Л + h) - GM_Л / (R_Л + h)^2) \qquad \textbf{(1 т.)}$$

$$u = 22\ 170 \text{ km/sec} \qquad \textbf{(1 т.)}$$

В координатна система, свързана с кораба, част от центробежното ускорение се компенсира от гравитационното ускорение на Луната. Остатъчното ускорение g' създава изкуствена гравитация.

$$g' = v^2 / (R_Л + h) - GM_Л / (R_Л + h)^2 \qquad \textbf{(2 т.)}$$

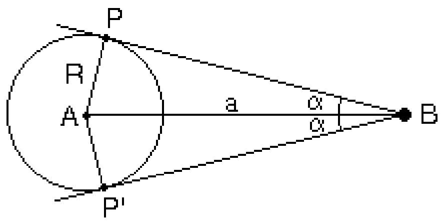
$$g' = 12.68 \text{ m/s}^2 \approx 1.3\, g \qquad \textbf{(1 т.)}$$

където g = 9.8 m/s^2 е земното ускорение.

III кръг на III национална олимпиада по астрономия, ***април 2000 г.***
УЧЕНИЦИ X - XII КЛАС

Задача 4 (13 точки): *Нека тясна двойна система се състои от обикновена звезда с малка маса и компактен обект – рентгенова звезда, невидима в оптическата област от спектъра. Често се случва пълната светимост L_X на рентгеновата звезда да е много пъти по-голяма от светимостта L_0 на обикновената звезда. Тогава рентгеновото излъчване, попадащо върху обикновената звезда, нагрява част от повърхността ѝ, което води до променливост в блясъка на двойната система. Пресметнете амплитудата на изменение на блясъка на системата в звездни величини, ако $L_X / L_0 = 500$, а разстоянието между звездите е 4 пъти по-голямо от радиуса на нормалната звезда. Лъчът на зрение лежи в орбиталната равнина на компонентите. Нагрятата част от нормалната звезда преизлъчва в космоса цялата лъчиста енергия, падаща върху нея от рентгеновата звезда. (Наред с едното възможно решение на задачата, съществува и приближено решение с достатъчна точност, при което формулата за площ на отрез от сфера може и да не се използва).*

Решение: Нека a е разстоянието между двете звезди, а R е радиусът на обикновената звезда А. От рентгеновата звезда В върху обикновената звезда попада лъчение ΔL_X, което представлява част от цялата светимост на рентгеновата звезда L_X. Както се вижда от чертежа, този поток лъчение се ограничава от един кръгов конус с връх в центъра на рентгеновата звезда,



който се допира до повърхността на обикновената звезда. Ъ́гълът при върха на конуса е 2α. Очевидно:

$$\Delta L_X / L_X = S' / S \qquad \textbf{(4 т.)}$$

където S е площта на сфера с център в рентгеновата звезда и радиус BP, а S' е площта на отреза от тази сфера, определен от окръжността, в която гореспоменатият конус се допира до повърхността на нормалната звезда. Използвайки формулата за площ на отрез от сфера, получаваме:

$$\Delta L_X = L_X\,(2\pi a^2\,(1 - \cos\alpha))\,/\,4\pi a^2$$

$$\Delta L_X = L_X\,(1 - (1 - R^2 / a^2)^{1/2})\,/\,2 \qquad \textbf{(3 т.)}$$

Облъчваният участък от повърхността на нормалната звезда ще се нагрее и ще стане по-ярък. В резултат на това, при подходящо разположение на оста на въртене на нормалната звезда спрямо нас, ще наблюдаваме периодично изменение на блясъка на тази звезда. Тогава щом лъчът на зрение лежи в орбиталната равнина на двойната система, блясъкът на звездата в минимум ще бъде пропорционален на L_0 / 2, защото в този момент тя обръща към нас едната (неогрята от другата звезда) своя половина, а в максимум блясъкът ѝ ще е пропорционален на $L_0 / 2 + \Delta L_X$ **(3 т.)** . В звездни величини амплитудата на изменение на блясъка на променливата получаваме чрез формулата на Погсон:

$$\Delta m = 2.5 \lg \left((L_0 / 2 + \Delta L_X) / L_0 / 2 \right) \qquad \textbf{(2 т.)}$$

$$\Delta m \approx 3^m.1 \qquad \textbf{(1 т.)}$$

(Приближено решение на задачата с достатъчна точност може да се получи и без да се използва формулата за лице на отрез от сфера. Лесно е да се съобрази, че площта на отреза, за който става дума, е близка по стойност на πR^2. Тогава $\Delta L_X = (L_X / 4)(R / a)^2 = L_X / 64 >> L_0 / 2$. Затова в израза $L_0 / 2 + \Delta L_X$ можем да пренебрегнем $L_0 / 2$. С тези приближения за амплитудата на блясъка получаваме:

$$\Delta m = 2.5 \lg \left((L_X / 2L_0)(R / a)^2 \right)$$

$$\Delta m \approx 3^m.0) \qquad \textbf{(същия брой точки)}$$